MATHunesa
**Jurnal Ilmiah Matematika** *Volume 7 No. 2 Tahun 2019*
*ISSN 2301-9115*

# *BI-MULTIPLIER* SIMETRIK PADA ALJABAR *INCLINE*

**Fita Loka Dewi**
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
*e*-mail : fitadewi@mhs.unesa.ac.id

**Dr. Agung Lukito, M.S.**
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
*e*-mail **:** agunglukito@unesa.ac.id

**Abstrak**

Aljabar *incline* merupakan generalisasi semiring dan latis. Aljabar incline adalah himpunan tak-kosong dengan operasi biner "$+$" dan "$*$" yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Konsep *multiplier* juga diterapkan pada aljabar incline dengan sifat reguler dan kanselatif kanan. Setiap bi-multiplier $*$-simetrik adalah reguler. Bi-multiplier $+$-simetrik pada aljabar incline bersifat kanselatif kanan.

**Kata kunci**: Aljabar *incline*, *bi-multiplier* simetrik, latis.

**Abstract**

*Incline* algebra is a generalization semiring and lattice. Incline algebra is an empty set with binary operations "$+$" and "$*$" satisfying the following certain axioms. The multiplier concept is also applied to incline algebra with regular and right chancellation. Every $*$-symmetric bi-multiplier is regular. $+$-symmetric bi-multiplier of incline algebra is right chancellation.

**Keywords:** *Incline* algebra, symmetric *bi-multiplier*, lattice.

## 1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak-kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Beberapa struktur aljabar yang sering dipelajari meliputi grup dan ring tetapi sebenarnya masih banyak struktur aljabar lain, salah satunya adalah aljabar *incline*. Teori aljabar incline didasarkan pada teori *semiring* dan teori latis (*lattice*). (Ozbal & Firat, 2016)

Konsep aljabar incline diperkenalkan oleh Alev Firat dan Sule Ayar Ozbal pada tahun 2016. Aljabar incline ini dibentuk dari himpunan tak-kosong dengan dua operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu.

Konsep *multiplier* juga diterapkan pada aljabar incline dengan sifat reguler, himpunan titik tetap, kernel, ideal dan kanselatif kanan. Sifat-sifat multiplier pada aljabar incline tersebut dapat digunakan pada beberapa penerapan, yaitu untuk aplikasi dalam kemungkinan penalaran dan automata, aplikasi untuk grafik, pengelompokan dan pemrograman, serta sistem linear (Cao, Kim, & Roush, 1984). Karena itu multiplier pada aljabar incline menarik untuk dipelajari. Dengan demikian akan dikaji lebih dalam pada penelitian ini mengenai sifat-sifat bi-multiplier $*$-dan $+$-simetrik pada aljabar incline yaitu reguler, himpunan titik tetap, kernel, ideal dan kanselatif kanan.

## 2. KAJIAN TEORI

Berikut ini diberikan beberapa definisi konsep yang digunakan untuk menunjang memahami pembahasan.

**Fungsi**
**Definisi 2.1**
Suatu fungsi $f$ dari himpunan $A$ ke himpunan $B$ adalah suatu aturan yang memetakan setiap elemen di $A$ dengan elemen tunggal di $B$. Dilambangkan $f: A \rightarrow B$.
(Thomas, Weir, & Hass, 2004)

**Operasi Biner**
**Definisi 2.2**
Misalkan $G$ himpunan tak-kosong. Operasi biner pada $G$ adalah fungsi dari $G \times G$ ke $G$.
(Gallian, 2010)

**Aljabar**
**Definisi 2.3**
Himpunan tak-kosong $R$ disebut aljabar jika dapat didefinisikan satu atau lebih operasi biner pada $R$.

(Miklhalev & Pilz, 2002)

**Poset**

**Definisi 2.4**

Poset (*Partially Order Set*) adalah himpunan tak-kosong dengan suatu relasi biner " $\leq$ " yang memenuhi sifat: 1. Refleksif: $a \leq a$ , 2. Transitif: jika $a \leq b$ , $b \leq c$ maka $a \leq c$ dan 3. Antisimetrik: jika $a \leq b$ , $b \leq a$ maka $a = b$.

(Masriyah, 2015)

**Supremum**

**Definisi 2.5**

Misalkan $S$ subhimpunan dari poset $A$. Sebuah elemen $u \in A$ disebut batas atas dari $S$ jika untuk semua $x \in S$ berlaku $x \leq u$. Selanjutnya, jika $u \leq v$ dengan $v$ adalah sebarang batas atas $A$, maka $u$adalah batas atas terkecil $A$ (*Supremum* $A$ ditulis Sup $A$).

(Manuharawati, 2013)

**Infimum**

**Definisi 2.6**

Misalkan $S$ subhimpunan dari poset $A$. Sebuah elemen $u \in A$ disebut batas bawah dari $S$ jika untuk semua $x \in S$ berlaku $u \leq x$ . Selanjutnya, jika $v \leq u$ dengan $v$ adalah sebarang batas bawah $A$ , maka $u$ adalah batas bawah terbesar $A$ (*Infimum* $A$ ditulis Inf $A$).

(Manuharawati, 2013)

**Latis**

**Definisi 2.7**

Misalkan $L$ himpunan tak-kosong dan tertutup terhadap operasi $\wedge$ dan $\vee$. Maka, $L$ sebuah latis jika untuk $a, b, c \in L$ memenuhi aksioma berikut:

1. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ , dan $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (*asosiatif*)
2. $a \wedge b = b \wedge a$ , dan $a \vee b = b \vee a$ (*komutatif*) dengan $a + a = a$.
3. $a \wedge (a \vee b) = a$, dan $a \vee (a \wedge b) = a$ (*absorpsi*).

Jika latis $L$ juga memenuhi aksioma distributif,

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, dan $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Maka $L$ disebut latis distributif.

(Cao, Kim, & Roush, 1984)

## 3. PEMBAHASAN

Berikut ini akan dibahas lebih lanjut mengenai definisi dan sifat-sifat bi-multiplier simetrik pada aljabar incline.

**Aljabar Incline**

**Definisi 3.1**

Aljabar $R$ dengan operasi biner "$+$" dan "$*$" disebut aljabar *incline*, untuk semua $x, y, z \in R$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

$(R1)$ $x + y = y + x$.
$(R2)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$.
$(R3)$ $x * (y * z) = (x * y) * z$.
$(R4)$ $x * (y + z) = (x * y) + (y * z)$.
$(R5)$ $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$.
$(R6)$ $x + x = x$.
$(R7)$ $x + (x * y) = x$.
$(R8)$ $y + (x * y) = y$.

Untuk selanjutnya, operasi $+$ disebut penjumlahan dan operasi $*$ disebut perkalian.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.2**

Aljabar incline $R$ dikatakan komutatif jika $x * y = y * x$ untuk semua $x, y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.3**

Misalkan $R$ aljabar incline.

Untuk semua $x, y \in R$, didefinisikan $x \leq y$ jika $x + y = y$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Lemma 3.4**

Misalkan $R$ aljabar incline.

Relasi $\leq$ dalam Definisi 3.3 memenuhi sifat berikut:

$(i)$ $x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z$.
$(ii)$ $x \leq y \Rightarrow z * x \leq z * y$.

**Bukti:**

$(i)$ $x + y = y$.
$(x + y) * z = y * z$
$(x * z) + (y * z) = y * z$.
$x * z \leq y * z$.

$(ii)$ $x + y = y$.
$z * (x + y) = y * z$.
$(z * x) + (z * y) = y * z$.
$z * x \leq z * y$.

**Proposisi 3.5**

Misalkan $R$ aljabar incline. Relasi $\leq$ dalam Definisi 3.3 memenuhi sifat berikut:

$(i)$ $x * y \leq x$ dan $x * y \leq y$ untuk semua $x, y \in R$.
$(ii)$ $y \leq z$ menyiratkan $x * y \leq x * z$ dan $y * x \leq z * x$ untuk semua $x, y \in R$.
$(iii)$ Jika $x \leq y$, $a \leq b$, maka $x + a \leq y + b$, $x * a \leq y * b$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**

$(i)$ $(x * y) + x = x + (x * y)$.
$(x * y) + x = x$.

$x * y \leq x.$
$(x * y) + y = y + (x * y).$
$(x * y) + y = y.$
$x * y \leq y.$

$(ii)$ $y + z = z.$
$x * (y + z) = x * z.$
$(x * y) + (x * z) = x * z.$
$x * y \leq x * z.$
$(y + z) * x = z * x.$
$(y * x) + (z * x) = z * x.$
$y * x \leq z * x.$

$(iii)$ $x + y = y,\ a + b = b.$
$(x + y) + (a + b) = y + b.$
$\big((x + y) + a\big) + b = y + b.$
$\big(x + (y + a)\big) + b = y + b.$
$\big(x + (a + y)\big) + b = y + b.$
$(x + a) + (x + y) + b = y + b.$
$(x + a) + (y + b) = y + b.$
$x + a \leq y + b.$
$(x * y) + (a * b) = y * b.$
$\big((x * y) + a\big) * b = y * b.$
$\big(x * (y + a)\big) * b = y * b.$
$\big(x * (a + y)\big) * b = y * b.$
$(x * a) + (x + y) * b = y * b.$
$(x * a) + (y * b) = y * b.$
$x * a \leq y * b.$

**Definisi 3.6**

Subincline pada aljabar incline $R$ adalah subhimpunan tak-kosong $M$ dari $R$ yang tertutup di bawah penjumlahan dan perkalian.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.7**

Ideal di aljabar inclin $R$ adalah subincline $S \subseteq R$ sedemikian hingga jika $x \in S$ dan $y \leq x$ maka $y \in S$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.8**

$(i)$ Elemen nol, ditulis 0, pada aljabar incline $R$ jika memenuhi $x + 0 = x = 0 + x$ dan $x * 0 = 0 * x = 0$ untuk semua $x \in R$.

$(ii)$ Identitas perkalian, ditulis 1, pada aljabar incline $R$ memenuhi $x * 1 = 1 * x = x$ untuk semua $x \in R$.

$(iii)$ Elemen tak-nol $a$ pada aljabar incline $R$ dengan elemen nol disebut pembagi nol kiri atau kanan jika ada elemen tak-nol $b \in R$ sehingga $a * b = 0$ atau $b * a = 0$.

$(iv)$ Pembagi nol adalah elemen pada $R$ yang merupakan pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.9**

Aljabar incline $R$ dengan identitas perkalian dan elemen nol disebut aljabar incline integral jika tidak memiliki pembagi nol.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.10**

Misalkan $R$ aljabar incline.

Operasi pada $R$ dikatakan memenuhi hukum kanselatif kiri jika

$$a + b = a + c \ \Rightarrow\ b = c,$$

dan kanselatif kanan jika

$$b + a = c + a \ \Rightarrow\ b = c,$$

untuk semua $a, b, c \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Hubungan Antara Aljabar Incline dan Latis Distributif**

**Proposisi 3.11**

a. Setiap latis distributif adalah aljabar incline.

b. Aljabar incline adalah latis distributif jika dan hanya jika $x * x = x$ untuk semua $x \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bi-Multiplier $*$-dan $+$-Simetrik pada Aljabar Incline**

**Definisi 3.12**

Misalkan $R$ aljabar incline. Pemetaan $f(.,.): R \times R \to R$ disebut *simetrik* jika

$$f(x, y) = f(y, x),$$

untuk semua $x, y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.13**

$(i)$ Misalkan $R$ aljabar incline.
Pemetaan $f(.,.): R \times R \to R$ disebut bi-multiplier $*$- simetrik jika
$f(x, y * z) = f(x, y) * z$, untuk semua $x, y, z \in R$.

$(ii)$ Misalkan $R$ aljabar incline.
Pemetaan $f(.,.): R \times R \to R$ disebut bi-multiplier $+$-simetrik jika
$f(x, y + z) = f(x, y) + z$, untuk semua $x, y, z \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.14**

Misalkan suatu bi-multiplier $*$-atau $+$-simetrik pada aljabar incline $R$ dan $a$ merupakan elemen di $R$. Himpunan $Fix_{f,a}(R)$ didefinisikan sebagai:

$$Fix_{f,a}(R) = \{ x \in R \mid f(a, x) = x \}.$$

(Ozbal & Firat, 2016)

**Definisi 3.15**
Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline $R$ dengan elemen nol. $Kernel\, f$ ditulis $Ker(f)$ didefinisikan sebagai:

$$Ker(f) = \{\, x \in R \mid f\,(0,x) = 0 \,\}.$$

(Ozbal & Firat, 2016)

**Proposisi 3.16**
Misalkan R aljaba incline dengan identitas perkalian dan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada $R$. Maka untuk semua $x, y, z \in R$ berlaku:

$(i)$ $f\,(x,y) = f\,(x,1) * y$.
$(ii)$ jika $f(x,1) = 1$, maka $f(x,y) = y$.
$(iii)$ $f\,(x, y * z\,) \le f\,(x,y) + z$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**

$(i)$ Misalkan $x, y \in R$.
Maka kita punya $f(x,y) = f\,(x, 1 * y)$.
$= f\,(x,1) * y$.
Jadi, $f\,(x,y) = f\,(\,x, 1\,) * y$.

$(ii)$ Misalkan $x, y \in R$.
$f\,(x,y) = f(\,x, 1\,) * y$.
$= 1 * y$.
$= y$.

$(iii)$ Misalkan $x, y, z \in R$.
$f(\,x, y * z\,) = f\,(x,y) * z$.
$f(x,y) * z \le f(x,y)$, dan
$f(x,y) * z \le z$.
Maka, diperoleh $f(x,y) * z \le f\,(x,y) + z$.
Karena $f\,(x, y * z) = f\,(x,y) * z$.
Maka,
$f\,(x, y * z) \le f(x,y) + z$.

**Definisi 3.17**
Misalkan $R$ aljabar incline. Pemetaan simetrik $f(.,.) : R \times R \to R$ pada aljabar incline $R$ dengan elemen 0 dikatakan reguler jika $f(0,0) = 0$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Proposisi 3.18**
Setiap bi-multiplier $*$-simetrik adalah reguler.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**
Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline $R$ dengan elemen nol. Maka diperoleh,
$f(\,0,0\,) = f(0, x * 0)$.
$= f(0,x) * 0$.
$= 0$.

**Proposisi 3.19**
Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline $R$. Jika $x \in Fix_{f,a}(R)$, maka $x * y \in Fix_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**
$f(\,a, x\,) = x$.
Misalkan $y \in R$ maka,
$f(\,a, x * y\,) = f(a,x) * y$.
$= x * y$.
Sehingga, diperoleh $x * y \in Fix_{f,a}(R)$.

**Proposisi 3.20**
Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline $R$ dengan elemen nol. Jika $x \in Ker_f$, maka $x * y \in Ker_f$ untuk semua $y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**
$f(\,0, x\,) = 0$.
Misalkan $y \in R$ maka,
$f(\,0, x * y\,) = f(\,0, x\,) * y$.
$= 0 * y$.
$= 0$.
Sehingga, diperoleh $x * y \in Ker_f$.

**Teorema 3.21**
Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline integral $R$ dengan elemen nol. Jika

$$f(\,0, x + y\,) = f(0,x) + f(0,y),$$

untuk semua $x, y \in R$, maka $Ker_f$ ideal.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**
Misalkan $y \in R$ dan $x \neq 0 \in Ker_f$.
Sehingga $y \le x$ maka,
$0 = f(0,x)$.
$= f\big(0, x + (\,y * x)\big)$.
$= f(0,x) + f(0, y * x)$.
$= f(0,x) + f(0,y) * x$.
$= 0 + f\,(0,y) * x$.
$= f(0,y) * x$.
Karena $R$ aljabar incline integral, $x \neq 0$, diperoleh $f\,(0,y) = 0$.
Sehingga diperoleh $y \in Ker_f$.
$Ker_f$ adalah ideal.

**Proposisi 3.22**

Misalkan $R$ aljabar incline dengan elemen nol dan $f$ suatu bi-multiplier $+$-simetrik pada $R$. Maka untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

$(i)$ $y \leq f(x, y)$.

$(ii)$ $f(x, 0) + y \leq f(x, y)$.

$(iii)$ jika $f(0,0) = 0$, maka $x \leq f(0, x)$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**

$(i)$ Misalkan $x, y \in R$.

$f(x, y) = f(x, y + y)$.

$= f(x, y) + y$.

$y \leq f(x, y)$.

$(ii)$ Misalkan $x, y \in R$.

$f(x, y) + f(x, y) = (f(x, o) + y) + f(x, y)$.

$f(x, y) = (f(x, o) + y) + f(x, y)$.

$f(x, 0) + y \leq f(x, y)$.

$(iii)$ Misalkan $x, y \in R$.

Tetapkan $x = 0$ dan $y = x$.

$f(0,0) + x \leq f(0, x)$.

$0 + x \leq f(0, x)$.

$x \leq f(0, x)$.

**Proposisi 3.23**

Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $+$-simetrik pada aljabar incline.

Jika $x \in Fix_{f,a}(R)$, maka $x + y \in Fix_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**

$f(a, x) = x$.

Misalkan $y \in R$ maka,

$f(a, x + y) = f(a, x) + y$.

$= x + y$.

Sehingga, diperoleh $x + y \in Fix_{f,a}(R)$.

**Proposisi 3.24**

Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $+$-simetrik pada aljabar incline dengan kanselatif kanan.

Jika $x + y \in Fix_{f,a}(R)$ dan $y \in Fix_{f,a}(R)$, maka $x \in Fix_{f,a}(R)$.

(Ozbal & Firat, 2016)

**Bukti:**

Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $+$-simetrik pada aljabar incline, $x + y \in Fix_{f,a}(R)$ dan $y \in Fix_{f,a}(R)$ maka,

$x + y = f(a, x + y)$.

$= f(a, x) + y$.

Karena $R$ kanselatif kanan maka diperoleh:

$f(a, x) = x$.

Jadi, $x \in Fix_{f,a}(R)$.

## 4. PENUTUP

**Simpulan**

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan sifat-sifat bi-multiplier $*$ dan $+$-simetrik pada aljabar incline adalah sebagai berikut:

a. Misalkan $R$ aljabar incline dengan identitas perkalian 1 dan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada $R$. Maka untuk semua $x, y, z \in R$ berlaku:
   $(i)$ $f(x, y) = f(x, 1) * y$.
   $(ii)$ jika $f(x, 1) = 1$, maka $f(x, y) = y$.
   $(iii)$ $f(x, y * z) \leq f(x, y) + z$.

b. Setiap bi-multiplier $*$-simetrik adalah reguler.

c. Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline $R$.Jika $x \in Fix_{f,a}(R)$, maka $x * y \in Fix_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.

d. Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline $R$ dengan elemen nol. Jika $x \in Ker_f$, maka $x * y \in Ker_f$ untuk semua $y \in R$.

e. Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $*$-simetrik pada aljabar incline integral $R$ dengan elemen nol. Jika $f(0, x + y) = f(0, x) + f(0, y)$, untuk semua $x, y \in R$, maka $Ker_f$ ideal.

f. Misalkan $R$ aljabar incline elemen nol dan $f$ suatu bi-multiplier $+$-simetrik pada $R$. Maka untuk semua $x, y \in R$ berlaku:
   $(i)$ $y \leq f(x, y)$.
   $(ii)$ $f(x, 0) + y \leq f(x, y)$.
   $(iii)$ jika $f(0,0) = 0$, maka $x \leq f(0, x)$.

g. Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $+$-simetrik pada aljabar incline. Jika $x \in Fix_{f,a}(R)$, maka $x + y \in Fix_{f,a}(R)$ untuk semua $y \in R$.

h. Misalkan $f$ suatu bi-multiplier $+$-simetrik pada aljabar incline dengan kanselatif kanan. Jika $x + y \in Fix_{f,a}(R)$ dan $y \in Fix_{f,a}(R)$, maka $x \in Fix_{f,a}(R)$.

**Saran**

Pada skripsi ini, penulis hanya membahas tentang sifat-sifat bi-multiplier $*$-dan $+$-simetrik pada aljabar incline. Penulis menyarankan bagi pembaca untuk mengkaji lebih dalam mengenai bisa atau tidaknya terbentuk aljabar incline baru dari pasangan aljabar incline yang sudah ada.

## DAFTAR PUSTAKA

Cao, Z., Kim, K., & Roush, F. (1984). *Incline Algebra and Applications*. Chichester, UK: Ellis Horwood Limited.

Firat, A., & Ozbal, S. A. (2016). On Symmetric Bi-Multipliers of Incline Algebras. *International Mathematical Forum*, 189-196.

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary Abstract Algebra. Seventh Edition.* Duluth: University of Minnesota Duluth.

Manuharawati. (2013). *Analisis Real I.* Surabaya: Zifatama Publisher.

Masriyah. (2015). *Dasar- Dasar Matematika.* Surabaya: Unesa University Press.

Mikhalev, A. V., & Pilz, G. F. (2002). *The Concise Handbook of Algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. G. (2004). *Thomas' Calculus.* New York: Pearson Education.